聯合培進教育出版
UNITED PRIME
EDUCATIONAL PUBLISHING

香港非遺文化 × 數學應用 × 商業智慧

「港式蛋撻」的數學建模

課題應用：面積與體積（三）

姓名：_____（　　）　**班別：**_____　**日期：**_____　**分數：**_____

閱讀材料：香港的非遺街頭美食 - 港式蛋撻

2014 年 6 月，蛋撻被列入香港首份非物質文化遺產清單，足以見證其作為本土飲食文化象徵的重要地位。港式蛋撻是十分著名的香港地道經典小食，外層鬆化，內裡蛋漿嫩滑香甜。製作過程主要分為製作撻皮與調配蛋水兩個工序，常見兩大經典派別：

（1）酥皮蛋撻：層次分明、鬆化香口，考驗師傅手藝；

（2）曲奇皮蛋撻：口感實淨、牛油味濃郁，做法相對簡單，也是不少餅店的主流選擇。

無論在百年老舖或冰室，甚至走到現代流行的茶餐廳，新鮮出爐、熱騰騰的蛋撻不僅是味覺享受，當中更承載香港人的集體回憶。港式蛋撻是香港飲食文化中不可或缺的元素。

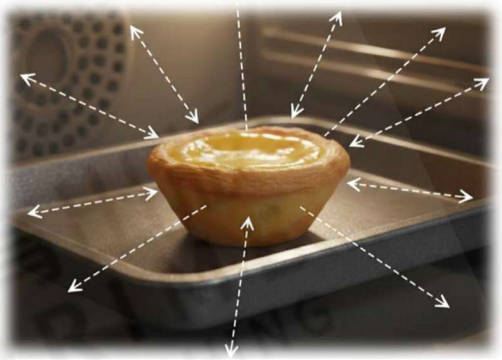
港式蛋撻的形狀

港式蛋撻通常呈現為圓台的平截頭體（Frustum of a cone）或接近圓柱體（Cylinder）形狀，當中有什麼考慮因素？

並非偶然，這是多年來製餅師傅在焗製技術、成本控制、美學傳統及實用考量之間取得平衡的智慧結晶。這看似簡單形狀，背後蘊含深厚的飲食文化底蘊及數學美學。

形狀背後的考量

為更清晰地了解此經典形狀的由來，我們可以從以下三個維度來探討：

考慮因素	詳細說明
① 美觀與傳統	圓渾對稱的形狀帶來視覺上的飽滿感和滿足感，是港人心中蛋撻的經典模樣。 直徑約 **6 至 6.5 厘米** 的大小，被認為是分量剛好的黃金標準。
② 焗制技術	平截頭體式的圓台形狀（即撻底略小於撻面）確保熱力更能均勻傳導至蛋撻中心，讓蛋漿能夠同步、嫩滑地凝固。這設計能避免出現外層過熟卻中心未熟的情況，亦使撻皮四周能夠均勻上色。 
③ 存放和物流	統一圓柱體 (Cylinder) 或圓台 (Frustum) 形狀意味著蛋撻之間可整齊排列，緊密疊放。這對於需要每日新鮮運送到各分店的蛋撻來說尤關重要，這能最大化利用有限的運輸空間，並在搬運過程中減少因碰撞而產生的破損，提升效益。

情境探究及思考問題：

資源有限及商業考慮的前提下，我們現在透過數學建模逐步進行數理分析，並探討如何利用最低的成本創造最大的商業價值，應用數學於日常生活中。從商業營運角度來看，若單考慮食材成本的話，我們可以考慮在保持蛋漿分量不變的前提下，**最小化蛋撻的總表面面積，便能減少酥皮的材料使用量，從而降低生產成本，達至增加盈利的目標**。因此，我們的目標是設計一個港式蛋撻，其中：

- 其蛋漿體積固定為 50 mL（即 50 cm^3）。在此條件下，體積被視為常數；
- 蛋撻外層酥皮所需材料的多少，可由其表面面積反映。

因此，我們**假設能代表這個蛋撻的立體圖形有以下幾何特性**：

- 該立體圖形是一個由沒有厚度的面所組成的開口容器，其容積為 50 cm^3
- 我們有方法計算出它的總表面面積

並考慮以下問題：

「該容器的形狀和尺寸是甚麼，方能令它的總表面面積最少？」

一、不同形狀的蛋撻

1. 在日常生活常見的蛋撻，你會形容為甚麼幾何形狀？

2. 這個幾何形狀的容積和總表面面積，有公式可以計算嗎？

3. 以下是一些可以代表蛋撻的幾何形狀方案。試從現實情境的考慮，指出方案 (1) 和方案 (2) 難以實行的限制。

考慮方案：不同幾何形狀的蛋撻			
方案 (1)：球體 Sphere	**方案 (2)：半球體** Hemisphere	**方案 (3)：圓柱體** Cylinder	**方案 (4)：圓台 (平截頭體)** Frustum of a cone

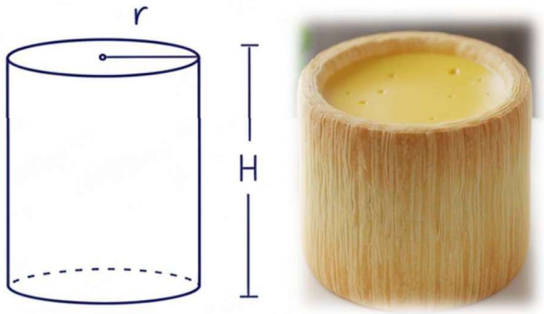
由此，下列的環節集中討論方案 (3) 和方案 (4) 兩個方案中，蛋撻的尺寸。

二、相同類型、不同尺寸的蛋撻

方案探究（三）：開口圓柱體（Open cylinder）

圓柱體的體積公式

✧ **圓柱體體積** $V = \pi r^2 H$ ……①



4. 試以適當公式表達代表圓柱形蛋撻酥皮的表面面積 S，並說明原因。

5. 設 $V = 50$。以 r 表 S。

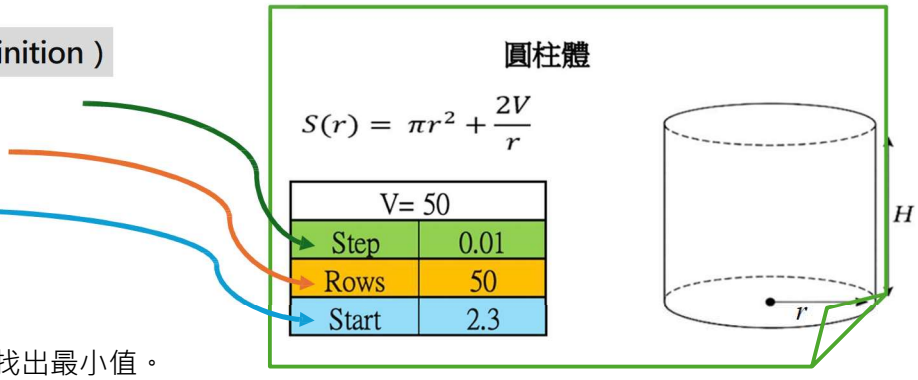
*思考點：*已知 S 是 r 的函數（即輸入不同的 r 值可獲得不同 S 值）。那 S 存不存在最小值？

任務：求 S 的最小值

方法 1：利用 Excel 工具

我們可以利用 Excel 工具，以電子方法快速協助我們計算不同組合下的輸出結果。我們打開 *Excel 檔案「求表面面積的最小值」：*

Excel 檔案：



步驟（一）：儲存格定義（Definition）

儲存格 step：產生自變量的間距 (密度)

儲存格 rows：測試數據的總數量

儲存格 start：第一個測試值

- 輸入不同 r 去計算 S，從而找出最小值。
- 透過調節 Step, Rows 及 Start 的數值以得到結果。
- 測試值之間越小，所得出的準確度越高

Q : 利用 Excel，輸入適當的公式和數值，找出 S 的最小值 (準確至 3 位小數)。
並將最後獲得結果的畫面，截圖貼在下方的方框內。

6. 由此，

當 $r =$ _____ 時，可得 $H =$ _____及 最小值 $S =$ _____ (準確至 3 位小數)

這代表當我們製作圓柱狀蛋撻的底半徑為 _____ cm、
高度為 _____ cm （即底半徑及高度接近相同）時，將獲得
一個使用最少撻皮材料的蛋撻，僅需使用 _____ cm^2 的撻皮，節省更多的原材料達至最佳的商業收益。

最省皮蛋撻的誕生

比較方法一，我們理應得出相同的結果，從 Excel 獲得的結果是否一致？

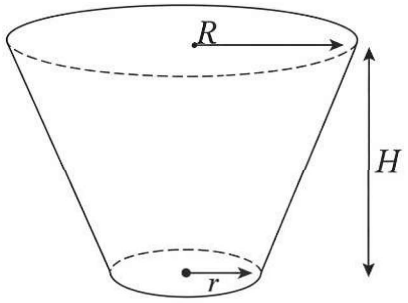
_____

有人認為圓柱形蛋撻可直立放置、受熱平均、易於製模、物流方便。同時，又有人認為圓柱形蛋撻欠缺傳統蛋撻獨有的線條美、側壁垂直致脫模困難、圓柱體頂部邊緣在烤焗時往往比中心部分更快受熱，容易出現邊緣已焦而中心未熟的情況。你同意嗎？試加以解釋。

方案探究（四）：開口圓台（Frustum of a cone）

圓台的體積公式

✧ 圓台的體積公式 $V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$



7. (挑戰題) 利用圓錐體側面面積公式 $S = \pi rl$，證明圓台的側面面積公式為

$$S_{\text{curved}} = \pi(R + r)\sqrt{H^2 + (R - r)^2}$$

因此，代表開口圓台形蛋撻酥皮的表面面積公式為

$$S = \pi(R + r)\sqrt{H^2 + (R - r)^2} + \pi r^2$$

8. 設 $V = 50$，我們能否把 S 只以單一變量 R、r 或 H 表達？

在這情況下，我們需要更多的假設，才能找出 S 的最小值。

任務：求 S 的最小值

步驟（一）：簡化函數中自變量的數量，達至優化運算的目的

9. 按你日常看到的蛋撻，你認為蛋撻頂部圓半徑 R 和底部圓半徑 r 的比是多少會比較美觀？你可以借助繪圖工具模擬。

答：我認為 $R:r =$ _____ $:1$ 最美觀，即 $R =$ _____ r

這個答案是同學對美觀的主觀衡量，因此每人的答案可能不同。暫時我們以 $R = kr$，其中 k 為常數來表達。

10. 設 $V = 50$。根據上題的答案，以 r 表 H。

11. (挑戰題) 由此，證明

$$S = \frac{k+1}{r(k^2+k+1)}\sqrt{22500 + \pi^2 r^6 (k-1)^2 (k^2+k+1)^2} + \pi r^2$$

12. 利用 Excel，輸入適當的 k 值和測試值，找出 S 的最小值 (準確至 3 位小數)。將最後獲得結果的畫面，截圖貼在下方的方框內。

因此，最節省材料的圓台形蛋撻，它的尺寸是：

下圓半徑為 _____ cm、上圓半徑為 _____ cm、高為 _____ cm。

小結：利用數學公式建模 + Excel 試驗

（1） 圓台形蛋撻和圓柱形蛋撻相比，_____ 形更能節省原材料。

（2） 上述的計算，基於甚麼假設？指出這些假設的限制。

（3） 不同的 k 值會帶來不同的結果嗎？這在現實世界中代表甚麼？